Luiss, Dipartimento di Economia e Finanza, A.A. 2022-2023
Corso di Metodi Matematici per la Finanza
Esercitazione 3

28 Settembre 2023

Curve di Livello

Esercizio 1

Esercizio 13.2 del libro di testo (Blume - Mathematics fro Economists).

Disegnare le curve di livello delle seguenti funzioni:

a): $f_1(x,y) = -x^2 - y^2$

Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(f_1) = \{(x,y) \in R^2 : -x^2 - y^2 = k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$x^2 + y^2 = -k$$

dunque le curve di livello sono ben definite solo per $k \leq 0$ (equazione di un cerchio con raggio $\sqrt{k}$). Le curve di livello sono rappresentate in Figura 1.

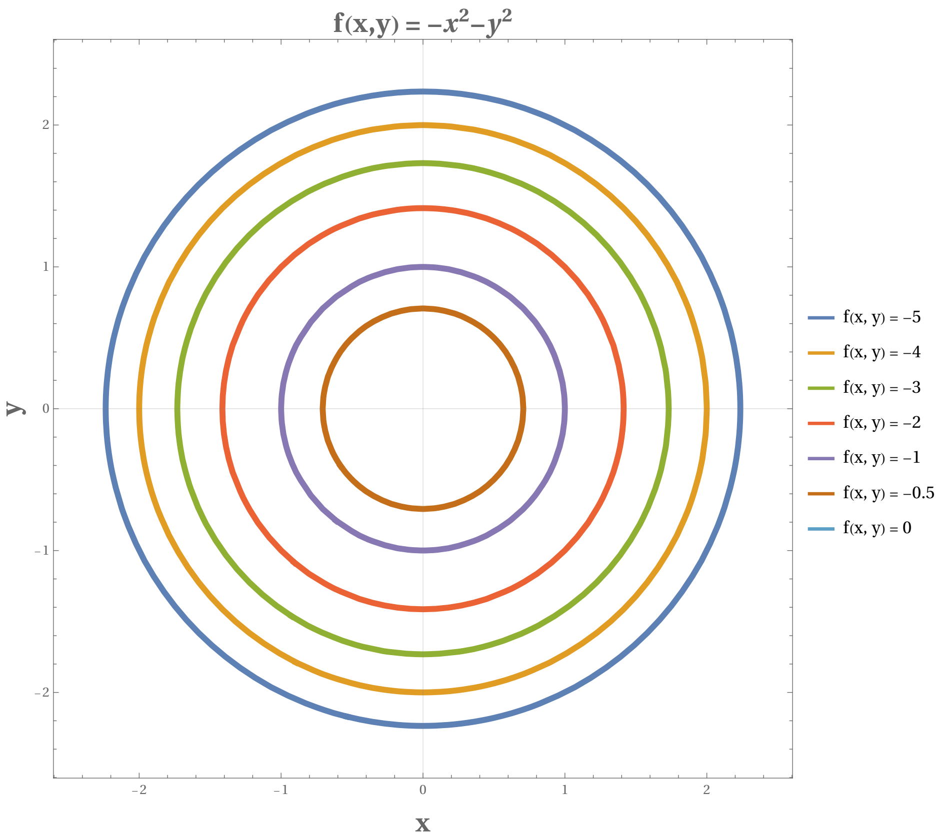

Figura 1: Curve di livello della funzione f_1 per vari valori di k

La funzione, disegnata nello spazio, ha la seguente forma (Figura 2):

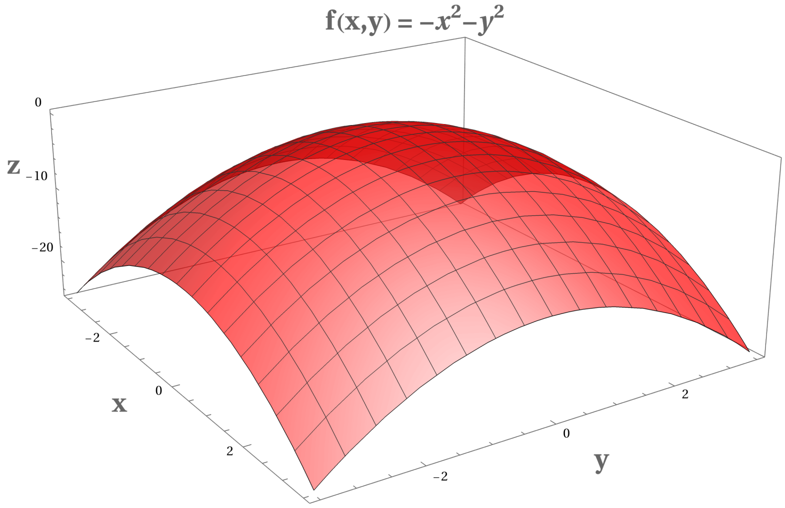

Figura 2: Rappresentazione della funzione $f_1(x, y)$ nello spazio

b): $f_2(x,y) = y - x^2$ Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(f_2) = \{(x,y) \in R^2 : y - x^2 = -k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$y = x^2 - k$$

Le curve di livello sono quindi parabole e sono rappresentate in Figura 3.

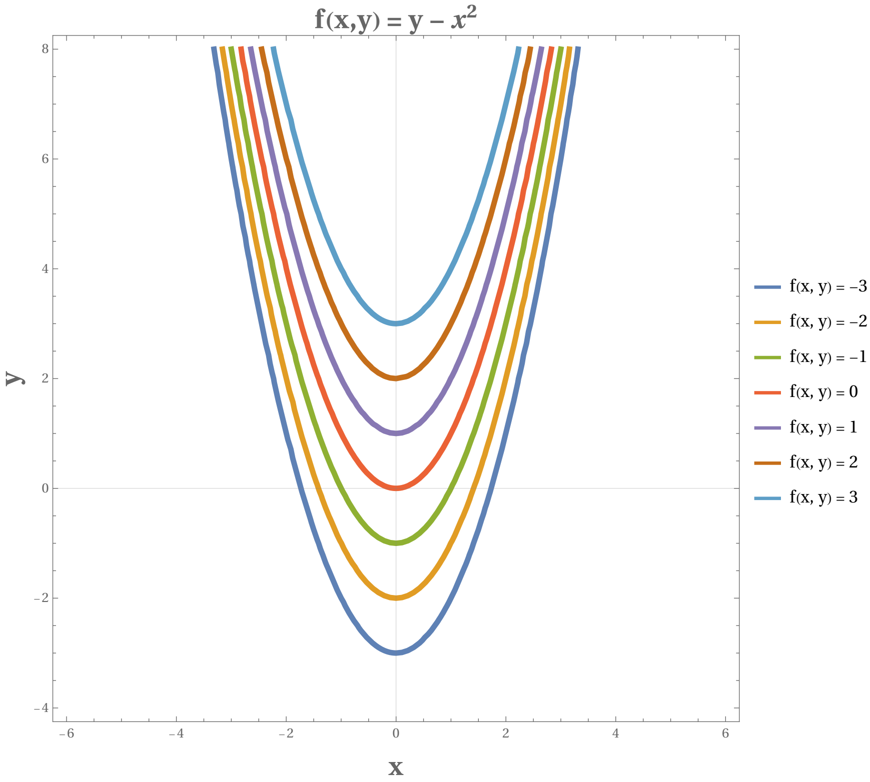

Figura 3: Curve di livello della funzione f_2 per vari valori di k

La funzione, disegnata nello spazio, ha la seguente forma (Figura 4):

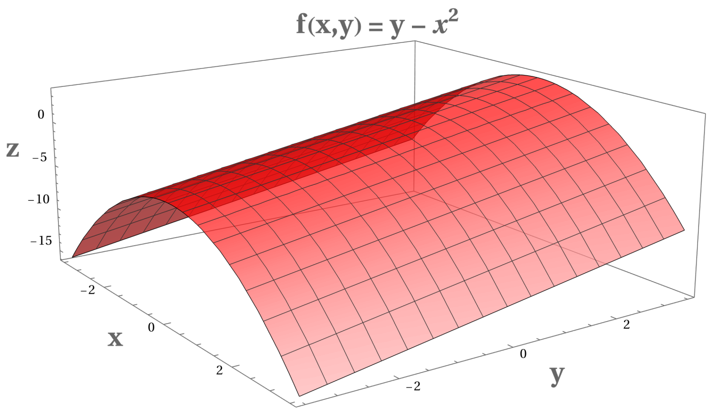

Figura 4: Rappresentazione della funzione $f_2(x,y)$ nello spazio

e): $f_3(x, y) = x^2 - y^2$
Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(f_3) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - y^2 = k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{x^2 - k}$$

Le curve di livello sono rappresentate in Figura 5.

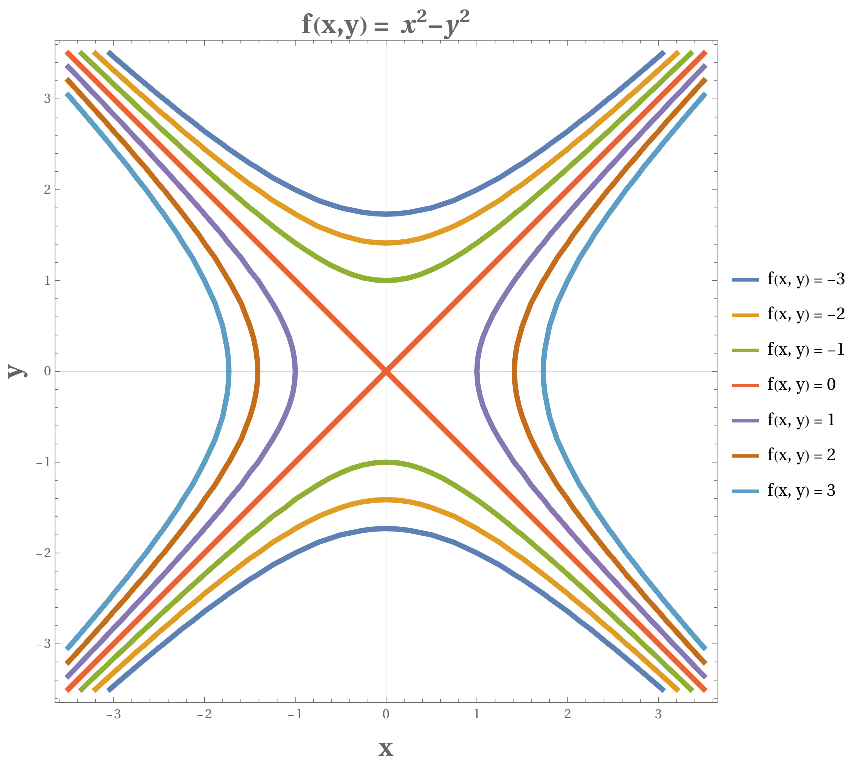

Figura 5: Curve di livello della funzione f_3 per vari valori di k

La funzione, disegnata nello spazio, ha la seguente forma (Figura 6):

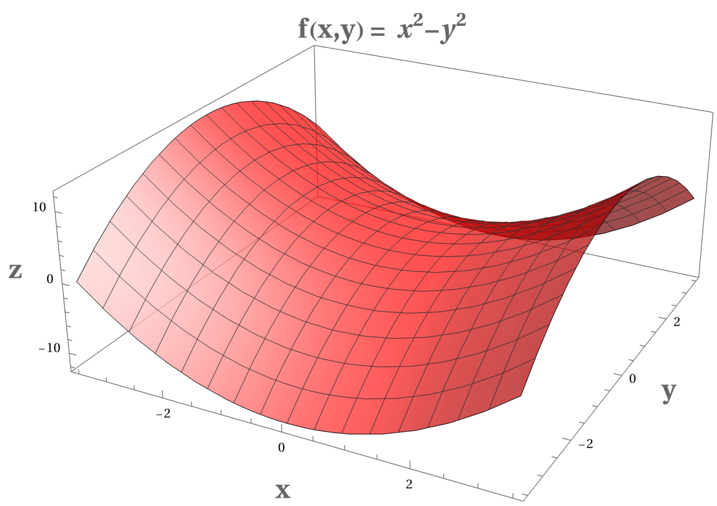

Figura 6: Rappresentazione della funzione $f_3(x, y)$ nello spazio

Esercizio 2

Esercizio 13.2 del libro di testo (Blume - Mathematics for Economists).

Disegnare le curve di livello della seguente funzione di produzione:

$$Q(K,L) = L^{1/4}K^{3/4}$$

Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(Q) = \{(L,K) \in \mathbb{R}^2 \ : \ L^{1/4}K^{3/4} = k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$K = \frac{k^{4/3}}{L^{1/3}}$$

Le curve di livello sono iperboli e sono rappresentate in Figura 7.

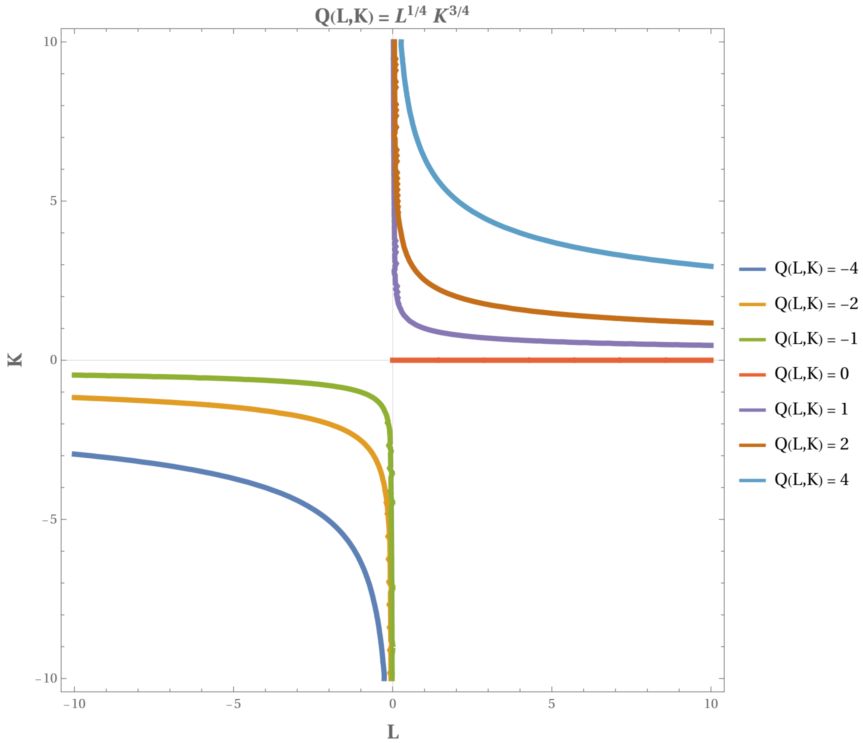

Figura 7: Rappresentazione della funzione $Q(L,K)$ per vari valori di k

Esercizio 3

Esercizio A (ottimizzazione libera) - punti 10 = 3+3+(3+1)

E' data la funzione

$$f(x) = y^2(x^2+1)$$

A1 Stabilire il CE e determinare analiticamente le curve di livello della funzione.

A2 Disegnare alcune curve di livello, e individuare con questa analisi i punti estremali globali (qualora esistano).

Non ci sono CE da applicare (il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}^2$). Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(f) = \{(x, y) \in R^2 : y^2(x^2+1) = k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{\frac{k}{(x^2+1)}}$$

Poichè k compare sotto radice, abbiamo la condizione $k \geq 0$, che si può scrivere anche $k \in [0, \infty)$. Le curve di livello sono rappresentate in Figura 8.

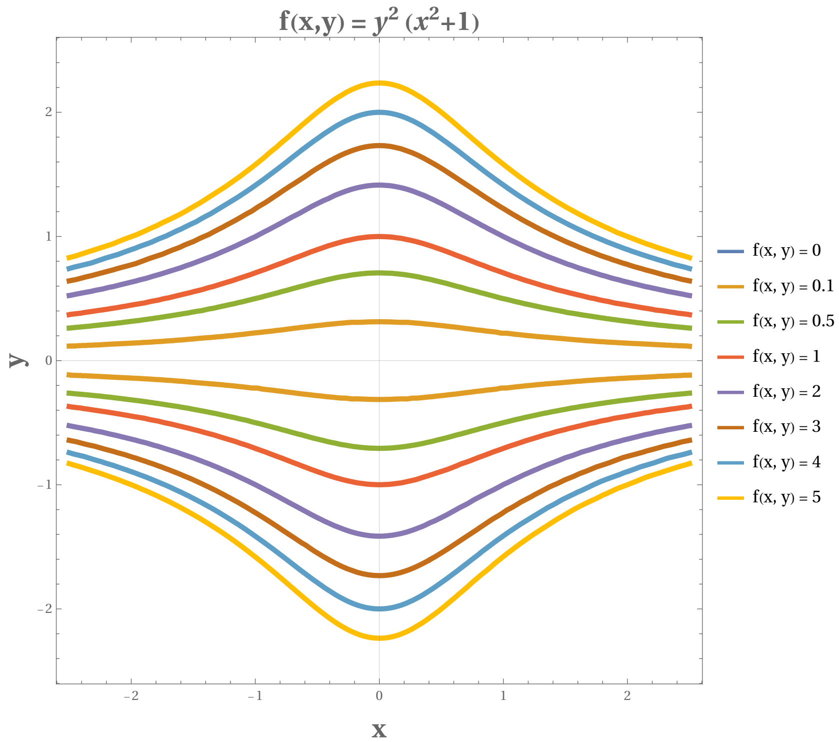

Figura 8: Curve di livello della funzione $f(x, y)$ per vari valori di k

Poichè $k \in [0, \infty)$, e k rappresenta il valore della funzione $f(x, y)$, possiamo concludere che $k = 0$ è un minimo globale per la funzione f, mentre $+\infty$ è l'estremo superiore.

Esercizio 4

Esercizio A (ottimizzazione libera) - punti 5

E' data la funzione

$$f(x) = x^2 + y^2 + 4$$

1. Stabilire il CE e determinare analiticamente le curve di livello della funzione.

2. Disegnare alcune curve di livello, e individuare con questa analisi i punti estremali globali (qualora esistano).

Le curve di livello sono descritte dall'insieme

$$C_k(f) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 + 4 = k\}$$

o alternativamente dall'equazione

$$x^2 + y^2 = 4 - k$$

In questo caso dobbiamo applicare la condizione $4 - k \geq 0$ perchè $4 - k$ rappresenta la radice del raggio del cerchio definito dall'equazione, dunque abbiamo $k \in [4, \infty)$ Le curve di livello sono rappresentate in Figura 9.

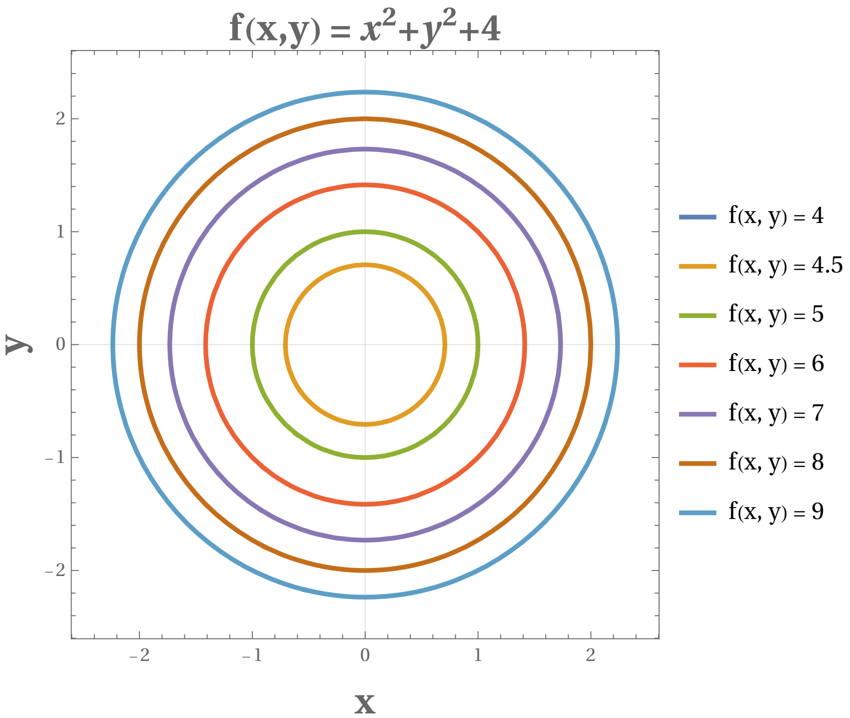

Figura 9: Curve di livello della funzione $f(x, y)$ per vari valori di k

Poichè $k \in [4, \infty)$, e k rappresenta il valore della funzione $f(x, y)$, possiamo concludere che $k = 4$ è un minimo globale per la funzione f, mentre $+\infty$ è l'estremo superiore.